مجلة البحوث الأكاديمية

Journal homepage: www.lam.edu.ly

دراسة تحليلية للبحث في شجرة التفريعات في طريقة التفريع والتحديد (B&B)

دراسة نظرية للمشاكل الخطية من نوع (m×2)

د. عبد الله محمد الشيخ
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية
جامعة مصراتة- ليبيا
a.elshaikh@eps.misuratau.edu.ly

أ. علي إبراهيم السريتي
كلية الاقتصاد والعلوم السياسية
جامعة مصراتة- ليبيا
ali.asraiti@eps.misuratau.edu.ly

مختار إبراهيم بالنور
قسم المراجعة الإدارية
الشركة الليبية للحديد والصلب - ليبيا
m.benoor@eps.misuratau.edu.ly

الملخص

تستخدم البرمجة الخطية في حل المشاكل التي تكون العلاقة بين متغيراتها (Decision Variables) علاقة خطية، وعادةً ما تحتوي قيمها عند الحل على كسور (Non-int)، وفي العديد من الحالات يكون هذا الحل غير منطقي من الناحية الاقتصادية والفيزيائية، عندما تكون متغيرات المشكلة غير قابلة للتجزئة على أرض الواقع، فمثلاً عندما تكون المشكلة إيجاد التوليفة المثلى لإنتاج نوعين من السفن، فإنه من غير المقبول أن يكون الحل لهذه المشكلة هو إنتاج (5.48) سفينة حجم صغيرة وإنتاج (3.67) سفينة حجم كبير. الجدير بالذكر هنا هو أنه يوجد عدة طرق لإيجاد الحل الأمثل الصحيح (*Int*) وهو حل لا يحتوي على كسر، ومن أهم هذه الطرق طريقة التفريع والتحديد (Branch and Bound Method)، تبدأ آلية عملها من الحل الأمثل (*Non-int*)، وذلك بتفريع المشكلة إلى مشكلتين فرعيتين باستخدام قيود إضافية، وهو يعني فصل منطقة الحلول الممكنة لمنطقتين (مشكلتين فرعيتين)، ومن تم إيجاد الحل الأمثل لهاتين المشكلتين كلاً على حدة، وبنفس الطريقة يتم تفريع المشاكل الفرعية وإيجاد حلولها أيضاً. ويتم التوقف عن سلسلة التفريعات في حالة عدم وجود حل للمشكلة الفرعية أو عندما تكون قيم حلها قيم صحيحة (Int Solution). إن عدد المشاكل الفرعية الناتجة من عملية التفريع تزداد بشكل كبير بزيادة عدد متغيراتها وعدد قيودها، عمدت هذه الورقة لدراسة سلسلة التفريعات والعوامل المؤثرة في نواتج الحل للمشاكل الفرعية مع تقديم التحليلات المطلوبة وتتبعها بيانياً، للوصول لمعايير (Criterions) يمكن من خلالها تحديد المشكلة الفرعية الواجب تفريعها (المشكلة المرشحة لاحتواء الحل الأمثل (*Int*) ، والتوقف عن تفريع الأخرى (التي لا تحتوي على هذا الحل)، بهدف توفير الوقت والجهد اللازم لحل المشكلة الرئيسية (تقليص عملية البحث في شجرة التفريعات).

الكلمات المفتاحية:

التفريع والتحديد، المشاكل الفرعية، (*Non-int*).

1. المقدمة

إن نموذج البرمجة الخطية(LP) (Linear Programming) ، من أهم نماذج بحوث العمليات واكثرها شيوعاً، ويستخدم لحل المشاكل الخطية التي ترتبط متغيراتها القرارية (Decision Variables) بعلاقات خطية، وذلك عن طريق صياغة المشاكل على شكل نموذج رياضي، فيتم تمثيل القيود (Constraints) وهي الشروط التي يتم حل المشكلة في ظلها على شكل معادلات خطية (معادلات من الدرجة الأولى)، ويتم تمثيل الهدف المراد الوصول إلية بمعادلة خطية أيضاً وتسمى دالة الهدف (Objective Function). يوجد عدة طرق يمكن استخدامها للوصول إلى الحل الأمثل (Optimal Solution) لهذا النموذج، ومن أهمها هذه الطرق وأكثرها شيوعاً هي طريقة السمبلكس (Simplex Method).

إن قيم المتغيرات القرارية للحل الأمثل عادةً ما تحتوي على قيم غير صحيحة (كسور) وهو ما يعرف بالحل العددي غير الصحيح (Non-int Solution)، وفي العديد من الحالات أن يكون الحل انتاج (5.48) سفينة حجم صغيرة وإنتاج (3.67) سفينة حجم كبير، إلا أنه في حالة الإنتاج الكبير لا تكون هذه الحالة معضلة، لإنه من الناحية الاقتصادية يمكن تجاهل الكسر، فمثلا إذا كان الحل الامثل لمشكلة تحديد توليفة من منتوجات الأثاث هو انتاج (1673.6) كرسي وإنتاج (2456.4) طاولة، فهذا الحل يمكن تقريبه ليكون (1673 , 2456). أما في حالة الإنتاج بكميات صغير فإن استخدام عملية التقريب هذه قد لا تكون مجدية اقتصادياً، إن التقريب للحد الأعلى ينتج حل صحيح (*Int*) سيكون خارج الحدود والإمكانيات المتاحة (Infeasible Solution)، كما أن الحل الأمثل (*Int*) قد يكون

بعيداً كلياً عن الحل الأمثل الحالي(*Non-int*) ، كأن يكون الحل هو انتاج (1) سفينة كبيرة وعدد (11) سفينة حجم صغيرة.
يوجد عدة طرق يمكن استخدامها للوصول إلى الحل الأمثل الصحيح (*Int*) انطلاقاً من الحل الأمثل (*Non-int*) وهذه الطرق تأخذ في اعتبارها ما ذكر أعلاه، ومن أهم هذه الطرق وأكثرها استخداماً هي طريقة التفريع والتحديد (Branch and Bound Method) ويرمز لها بــــ (B&B). إن الفكرة الكامنة وراء هذه الطريقة (B&B) هي تجزئة أو تفريع (Branched) المشكلة إلى سلسلة من المشاكل الفرعية، عن طريق إضافة قيدين أخرين للمشكلة، بحيث يُكَون كل قيد مع قيود المشكلة الأساسية مشكلة فرعية، وذلك بهدف دفع المشاكل الفرعية لتكون حلولها (*Int*) ، ومن ثم المفاضلة بينها لتحديد الحل الأمثل الصحيح (*Int*) للمشكلة الرئيسية.

2. أهداف الدراسة

تهدف هذه الورقة لدراسة وتحليل آلية عمل في طريقة (B&B) لتحديد العوامل التي تؤثر في عدد المشاكل الفرعية المتولدة من عملية التفريع (فروع شجرة الحلول)، وذلك لاستنتاج بعض المعايير التي يمكن استخدامها لتقليص عدد المشكلة اللازمة لتحديد الحل الأمثل (*Int*)، والذي يعني تخفيض عدد المشاكل الفرعية (Iterations) في شجرة التفريعات، وهذا سيوفر الوقت والجهد اللازمين لتحويل الحل الأمثل غير الصحيح (*Non-int*) إلى حل أمثل (*Int*)، كل ذلك مع تقديم التحليلات المنطقية الخاصة بذلك ومدعمة بالأدلة والتحليل البياني.

3. مشكلة الدراسة

تهتم هذه الورقة بدراسة طريقة التفريع والتحديد (B&B) التي تستخدم في إيجاد الحلول الصحيحة (*Int*) ، انطلاقا من الحل غير الصحيح (*Non-int*) عن طريق تجزئة المشكلة الرئيسية إلى سلسلة من المشاكل الفرعية، إن سلسلة التفريعات هذه تبدأ بتفريع المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين بإضافة قيدين جديدين على قيود المشكلة الرئيسية.
الجدير بالذكر هنا هو أن كل عملية تفريع تتم بناءً على متغير معين، وإن إضافة القيدين الجديدين يكون على المتغير المستخدم كأساس لعملية التفريع، وإن قيم هذا المتغير في كلا الحلين للمشكلتين الفرعيتين تكون قيم صحيحة (*Int*)، وعند الانتقال إلى مستوى أخر في سلسلة التفريعات لا يتم اختيار نفس المتغير السابق، لإن قيم حله تكون قيم صحيحة، لذلك يتم اختيار متغير أخر تكون قيمته في الحل تحتوي على كسر، وهكذا تستمر سلسلة التفريعات إلى أن نصل إلى مشاكل فرعية لا يمكن تفريعها. فلا تستمر عملية التفريع في المشاكل الفرعية عندما تكون كل قيم الحل لمتغيراتها قيم صحيحة (*Int*)، لإن الأساس في عملية التفريع هو اختيار متغير تكون قيمته في الحل تحتوي على كسر ليكون هو الأساس في عملية التفريع. كما أنه لا يمكن الاستمرار أيضاً في عملية التفريع عندما لا يوجد حل للمشكلة الفرعية اصلاً، لإنه أحياناً عند إضافة قيد جديد على قيود المشكلة قد يجعلها غير ممكنة الحل، والذي يعني بيانياً عدم وجود منطقة حلول ترضي كافة قيود المشكلة، بسب أن القيد الجديد قد يكون متعارض مع قيد أو أكثر من قيود المشكلة الرئيسية، لإن الأساس في عملية التفريع هو الانطلاق من حل ممكن (Feasible Solution).
والجدير بالذكر هنا أن عملية التفريع تتطلب إجراء بعض العمليات الحسابية، وتزداد هذه العمليات مع زيادة السلسلة (مستويات التفريع)، كما أن دالة الهدف للمشاكل الفرعية تقل جودتها مع زيادة السلسلة (شجرة التفريعات)، بمعنى أنه في حالة التعظيم (Maximuzation) تنخفض قيم دالة الهدف للمشاكل الفرعية، وستكون أصغر من أو تساوي قيمة دالة الهدف للمشكلة الأساسية، لأنه كلما توسعنا في عملية التفريع يعني إضافة قيود على المشكلة وهذا طبعاً يعني استبعاد الحلول المثلى والانتقال إلى حلول أقل جدوى. وبنفس المنطق يحدث العكس في حالة التقليل (Minmuzation) فتزاد قيم دالة الهدف مع زيادة الاستمرار في عملية التفريع (تكون قيم دالة الهدف للمشاكل الفرعية أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف للمشكلة الرئيسية).
والسؤال الذي يُطرح هنا هو، هل يمكن تقليص عملية التفريع والتي يؤدي إلى خفض العمليات الحسابية اللازمة لذلك، وبالتالي توفير الوقت والجهد. فتدرس هذه الورقة آلية عملية التفريع بهدف معرفة المشاكل الفرعية المرشحة، وهي المشاكل الفرعية التي يمكن أن تتضمن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وهذا يعني طبعاً معرفة المشاكل الفرعية غير المرشحة، وهي المشاكل الفرعية التي لا تتضمن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية، بهدف التوقف عن تفريعها لتوفير الوقت والجهد. وعليه فإنه يمكن تلخيص مشكلة هذه الدراسة في التساؤلات الاتية:

- من خلال عملية تحليل طريقة (B&B) وآلية عملها، يمكن التأكيد على أن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية (الناتج من عملية التقريب الاعتيادية للكسر) يمكن أن يكون أفضل قيمة دالة الهدف للمشكلة الفرعية الأسواء (المشكلة الفرعية ذات القيمة الأصغر في حالة التعظيم وذات القمة الأكبر في حالة التقليل)، وفي هذه الحالة يمكن التأكيد على ضرورة التوقف عن تفريع المشاكل الفرعية هذه، بمعنى وأن المشكلة الفرعية هذه (الأسواء) لا يمكن أن تحتوي على الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية وفقاً لطريقة (B&B)، وذلك لأن الاستمرار في عملية تفريعها (إضافة قيود جديدة) ستؤدي إلى انخفاض في قيم الحلول الناتجة عن عملية التفريع.
- في حالة عدم حدوث النقطة السابقة، هل يمكن تصميم معايير معينة لمعرفة المشكلة الفرعية التي تحتوي على الحل الأمثل (*Int*)

➢ t) للمشكلة الرئيسية؟ وبالتالي معرفة المشاكل الفرعية التي يجب الاستمرار في عملية تفريعها، والأخرى التي يجب التوقف عن عملية تفريعها لتوفير الوقت والجهد في عملية الوصول إلى الحل الأمثل (*Int*)؟

4. أهمية الدراسة:

تبرز أهمية هذه الورقة في أكثر من جانب، ففي ظل الندرة النسبية للمراجع العربية لطريقة التفريع والتحديد (B&B) تناولت هذه الدراسة هذه الطريقة وتوفر معلومات قيمة عنها، وتسلط الضوء على آلية عملها، كما توضح التحليلات المنطقية الخاصة بآلية عملها وذلك وفقاً للتحليل البياني لها. ومن جهة أخرى فإن المشاكل الفرعية لهذه الطريقة تزداد بزيادة أسية مع زيادة عدد المتغيرات وعدد القيود للمشكلة، وهذه الدراسة تعتبر تطوير لطريقة (B&B) وإن تطبيقها سيخفض عدد المشاكل الفرعية (Iterations)، وهذا طبعاً سيوفر الجهد والوقت خاصةً في المشاكل الكبيرة.

5. طريقة التفريع والتحديد B&B)

تعتبرخوارزمية قطع المستوى القطع **(**Gomory Cutting Plane Algorithm) من أقدم الطرق المستخدم في حل برامج الأعداد الصحيحة والتي ظهرت سنة (1958**)**،[1] ثم أُستخدمت الطريقة (B&B**)** ولأول مرة في سنة 1960 من طرف الباحثين A Doig) و G. Land) [2]لإيجاد الحل الأمثل بالأعداد الصحيحة (*Int*) لمشاكل البرمجة الخطية، وهي تُعد من الاساليب التكرارية (Iterative Method) التي تعني الوصول للحل عبر خطوات محددة ومتكررة انطلاقاً من حل أمثل ممكن **(***Non-int*) (Feasible)، ثم طورت سنة 1965 عن طريق (E. Bala) لحل مشاكل البرمجة الخطية بالمتغيرات الثنائية (Binaire). قبل الخوض في آلية هذه الطريقة للوصول إلى أهداف البحث، وسيتم عرض النموذج الرياضي لهذه المشكلة، ومن ثم تقديم مراجعة سريعة للدراسات السابقة لها.

أ. *النموذج الرياضي لبرمجة العدد الصحيح* :

تهدف هذه طريقة (B&B) للبحث عن الحل الأمثل الصحيح (*Int*) انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بالأعداد غير الصحيحة (Linear Programming Relaxations)، وذلك بتجزئة المشكلة إلى مشكلتين فرعيتين، وذلك لاستبعاد الحل الحالي (*Non-int*) من منطقة الحلول الممكنة، وبذلك يكون النموذج الرياضي لبرمجة الأعداد الصحيحة هو نفس النموذج الرياضي للبرمجة الخطية (LPR)، بعد إضافة شرط أن تكون قيم المتغيرات القرارية قيم صحيحة (*Int*) كالتالي:

$$Max\ or\ Min\ (z) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \qquad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\ (\leq, =,\ \geq)\ b_i\ \ for\ \ i = 1,2, \dots, m \quad (2)$$

$$x_j\ \geq 0, \qquad \forall j = 1,2, \dots \dots, n \qquad (3)$$

$$x_j\ integer, \qquad j = 1,2, \dots \dots, p \quad (p \leq n)$$

حيث أن:

z : قيمة دالة الهدف التي تقيس فعالية أو كفاءة قرار الاختيار.

x_j : المتغيرات التي يراد معرفة قيمتها.

c_j : تكلفة (أو عائد) الوحدة الواحدة من المتغيرات.

b_i : المتاح من الموارد أو التي تعكس شروط التشغيل.

m **:** عدد القيود أو الشروط في المشكلة (النموذج الرياضي).

n **:** عدد المتغيرات القرارية في المشكلة (النموذج الرياضي).

ب. *الدراسات السابقة* (*Literature Review*):

تُقسم العناصر التي تؤثر في العمليات الحسابية التي تُحدد سلوك خوارزمية (B&B) إلى ثلاثة استراتيجيات هي: استراتيجية البحث (Search Strategy) وتهتم بالترتيبات التي يمكن اتخاذها للبحث واستكشاف المشاكل الفرعية في شجرة التفريعات، والاستراتيجية الثانية هي استراتيجية التفرع (Branching Strategy) وهي تعُنى بالمعايير التي يمكن استخدامها في تفريع المشكلة وإنتاج المشاكل الفرعية، والاستراتيجية الأخيرة تُعنى بقواعد التقليم (Pruning Rules) وهي الآليات أو الإجراءات التي يمكن استخدامها للحد من استكشاف المشاكل الفرعية (مناطق الحلول الممكنة) التي يمكن أن تعطي حلول دون مستوى الحل الأمثل (*Int*) [3]. درس Achterberg *et al.* هذه الخوارزمية من حيث تحديد المتغير المستخدم في عملية التفريع وذكر بأنه يوجد قاعدة بسيطة وشائعة الاستخدام تسمى (Most Fractional or Most Infeasible)، وهي أن يتم اختيار المتغير الذي يكون جزئه الكسري الأقرب إلى النصف (0.5)، وبصفة عامة لا يمكن الجزم بأن نتائج هذه القاعدة أفضل من عملية اختيار المتغير عشوائياً من حيث عدد المشاكل المتـولدة من عمليــة التفــريع (الــوقت اللازم لإجــراء هــذه العمليات الحســابية الخاصــة بــذلك). ذكــر في هــذا الجـانب Ortega and Wolsey بأنه تم اقتراح قاعدة معاكسة لذلك وتسمى (Opposite branching Rule)، [4] وفيها يتم اختيار المتغير الذي يكون جزئه الكسري هو الأبعد عن 0.5. في عملية تحديد المتغير المستخدم كأساس لعملية التفريع اقترح Applegate *et al.* طريقة تسمى باستراتيجية التفرع القوي (Strong Branching)، وفيها يتم اختيار المتغير الذي يكون له أكبر تأثير

ممكن على قيمة دالة الهدف، إلا أن هذا عملية التحديد هذه غالبًا ما تكون تكلفتها باهظةً من حيث الوقت اللازم لذلك. اقترح أيضاً Linderoth and Savelsbergh أسلوب هجين يجمع بين اسلوب التفرع القوي وأسلوب (Pseudocost) وسمى هذا المزيج بالتفرع الهجين (Hybrid Strong/Pseudocost Branching). استكشف Pryor and Chinneck قواعد تفريع جديدة، الفكرة الكامنة وراء هذه الطريقة هو اختيار المتغير الذي له تأثير أكبر متغيرات المشكلة وعادةً ما تعطي هذه الطريقة نتائج جيدة[5]. وقد طور Fischetti and Monaci طريقة تفريع حديثة تسمى التفرع الخلفي (Backdoor Branching)، وتعمل على تحديد عدد بسيط من المتغيرات التي يجب استخدامها قي عملية التفريع قبل غيرها، وما يميز هذه التقنية هو أن شجرة التفريعات تكون صغيرة نسبياً [6].

مؤخراً اقترح Munapo نهجًا جديدًا لتقليل التعقيدات في خوارزمية (B&B) لحل مشكلة (knapsack linear Int)، ففي طريقة (B&B) إذا كان الحل الأمثل للبرمجة الخطية (LP) عددًا صحيحًا، فسيكون الحل الأمثل لمشكلة العدد الصحيح متاحًا، وإذا لم يكن كذلك فيتم تحديد متغير ذو قيمة كسرية لإنشاء مشكلتين فرعيتين، بحيث يتم تجاهل هذا الجزء من المنطقة الممكنة (Feasible Region)، تتكرر العملية على جميع المتغيرات ذات القيم الكسرية حتى يتم إيجاد الحل الصحيح، وفي نهجه هذا يتم إنشاء مجموع متغير وقيود إضافية وإضافتها إلى المشكلة الأصلية قبل البدء في حلها أصلاً [7]. من أجل تحسين سرعة خوارزميات (B&B)، مؤخرًا تم إدخال تقنيات التعلم (Learning)،[8] وهي تعني إدخال الذكاء الاصطناعي في حل هذه الخوارزميات.

وأخيراً درس الشيخ وآخرون (2022)، آلية عمل هذه الطريقة وتأثير اختيار المتغير (ذو الكسر الأكبر أو الأصغر) المستخدم كأساس في عملية التفريع على عدد المشاكل الفرعية المتولدة من عملية التفريع، وتبين أنه ليس من الضرورة أن تتساوى عدد المشاكل الفرعية عند الاختلاف في استخدام المتغير المستخدم في عملية التفريعات، وأنه لا توجد قاعدة ثابتة لتحديد المتغير المناسب لذلك.[9]

6. تحليل آلية تحرك نقطة حل المشكلة الرئيسية إلى نقطتي حل المشكلتين الفرعيتين

حتى نتمكن من تحليل آلية حركة نقطة الحل وتحركها إلى نقطتي حل المشكلتين الفرعيتين في طريقة (B&B)، نجد ضرورة لتوضيح الفكرة الرئيسية لآلية عمل هذه الطريقة. فالفكرة الكامنة وراء عمل هذه الطريقة هو إضافة قيدان (على شكل متباينات) على أحد متغيرات المشكلة، بحيث يحمل القيد الأول علامة أصغر من أو يساوي (≤)، ويكون الطرف الأيمن لهذا القيد هو قيمة العدد الصحيح لهذا المتغير عند الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية، ويحمل القيد الثاني علامة أكبر أو يساوي (≥) ويكون الطرف الأيمن مساوياً للقيمة الصحيحة للمتغير زائد الواحد الصحيح ، وذلك لاستبعاد الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية من بين الحلول الممكنة، وبذلك تنقسم المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين، فيُكون القيد الأول مع قيود المشكلة الرئيسية المشكلة الفرعية الأولى، ويُكون القيد الثاني معها المشكلة الفرعية الثانية، وبذلك يكون الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية خارج منطقة الحلول الممكنة، ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لكل مشكلة فرعية على حدة، على أمل أن تكون حلول المشاكل الفرعية حلول صحيحة (*Int*)، ولتوضيح ذلك نتتبع آلية عمل هذه الطريقة باستخدام الطريقة البيانية نفرض المثال (النموذج الرياضي) التالي بهدف استخدام هذا المثال في التحليلات التالية:

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad (4)$$

$$S.T:$$

$$4x_1 + 4.6x_2 \le 27 \qquad (5)$$

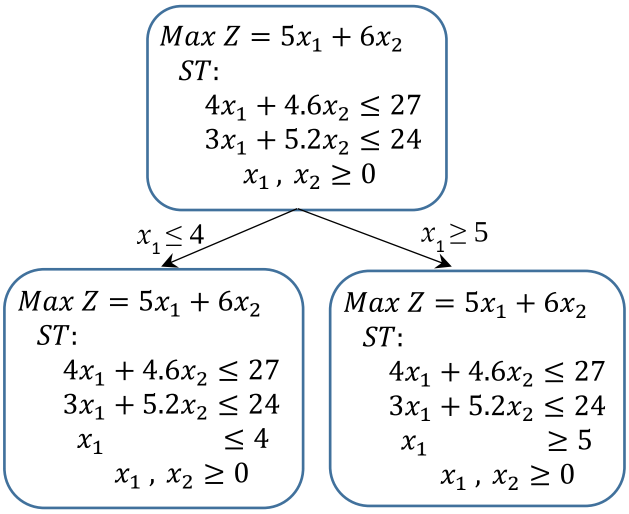
$$3x_1 + 5.2x_2 \le 24 \qquad (6)$$

$$x_1\ ،\ x_2 \ge 0\ and\ Int$$

يظهر الحل الأمثل لهذه المشكلة باستخدام برنامج (QM for Windows V5) كالتالي:

$x_1 = 4.29$ ، $x_2 = 2.14$ ، $z = 34.29$

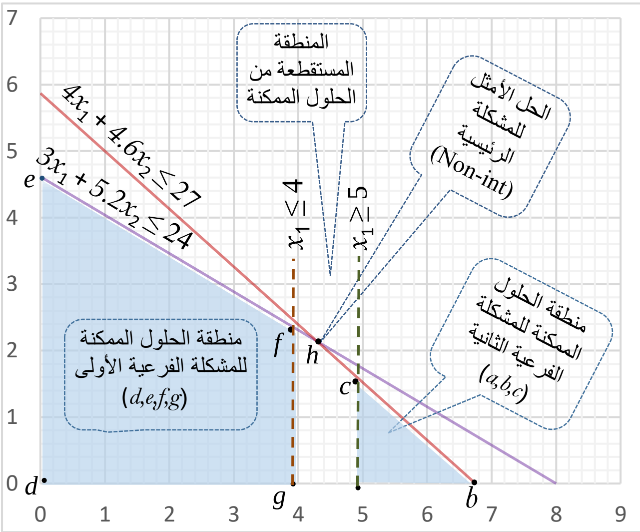
باستخدام المتغير (x_1) كأساس لعملية التفريع، والذي يعني استبعاد المنطقة المتضمنة للكسر (4.29)، أي استبعاد المنطقة المحصورة بين الرقمين (5 , 4)، ويتم ذلك عن طريق إضافة قيدين جديدين على هذا المتغير (x_1) وهما: ($x_1 \le 4$) ويُكون مع قيود المشكلة الرئيسية المشكلة الفرعية الأولى، وإضافة القيد ($x_1 \ge 5$) والذي يُكَون مع قيود المشكلة الرئيسية المشكلة الفرعية الثانية، كما يتضح من الشكل التخطيطي التالي:



الشكل (1) مخطط لتفريع النموذج الرياضي إلى مشكلتين فرعيتين

ويمكن توضيح عملية التفريع هذه بيانياً كما هو موضح بالشكل (2)، فيتضح منه أن انقسام (تفريع) المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين، وذلك باستبعاد المنطقة المتضمنة للحل الأمثل

للمشكلة الرئيسية (Non-int)، وبهذا أصبحت المنطقة المحصورة بين النقاط (d,e,f,g) تمثل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى والمنطقة المحصورة بين النقاط (a,b,c) هي ومنطقة الحلول الممكنة للمشكلة الثانية.



الشكل (2) المشكلتين الفرعيتين والمنطقة المستبعدة من الحل للمشكلة الرئيسية

بعد عملية التفريع يتم حل كل مشكلة فرعية على حِدَة بإحدى الأساليب المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية كطريقة (Simplex) مثلاً، وبنفس الطريقة يتم تجزئة هاتان المشكلتان الفرعيتان إذا تبين أن حلولهما تحتوي على كسور، وتستمر سلسلة التفريع (Branching) لكل مشكلة فرعية إلا إذا كانت قيم حلها (*Int*) أو تبين أنها ليس لها حل. وتُكون هذه العملية في مجملها شجرة من المشاكل الفرعية، وتتم عملية المفاضلة بين حلول المشاكل الفرعية (*Int*) لهذه الشجرة لتحديد الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية. لمزيد من التفاصيل حول آلية عمل هذه الطريقة (B&B)، أنظر الشيخ (2022) وآخرون، حيث تبين ورقتهم في أن عدد المشاكل الفرعية بشجرة التفريعات لهذا المثال هي (20) مشكلة فرعية، وإن الحل الأمثل (*Int*) لها قد تتضمنه المشكلة الفرعية الأولى، وتحديداً عند النقطة (*i*) التي إحداثياتها (2 , 4) وتحقق عائد وقدره (32).

والجدير بالذكر هنا هو أن حلول المشاكل الفرعية (قيم دالة الهدف) تكون أقل جدوى أو على الأقل مساوية لحل المشكلة الأساسية، وذلك لأن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (*Non-int*) هو الحل الأفضل للمشكلة الرئيسية على الإطلاق، وبالتالي استبعاد هذا الحل (المنطقة المتضمنة له)، يعني أن الحلول المتبقية أقل جودة أو مساوية له في أحسن الظروف. وبذلك يمكن القول بإنه كلما استمرينا في عملية التفريع فإن قيمة دالة الهدف سوف تكون أقل جدوى (تنخفض في حالة التعظيم وتزداد قيمتها في حالة التقليل)، بمعنى أن الحلول المتحصل عليها في بداية تفريع الشجرة تكون أفضل من التي تليهـا.

كما إن الحل الأمثل لكل مشكلة فرعية سيكون أقرب ما يمكن للحل الأمثل للمشكلة الرئيسية، لإنه هذا الحل هو أفضل حل للمشكلة، وبذلك كلما ابتعدنا عنه سيزداد الحل سوءً، وعليه ستكون الحلول المثلى للمشاكل الفرعية على حدود منطقة الحلول الممكنة لها (على إحدى النقاط الطرفية)، وأقرب ما يكون لهذا الحل. وعند تطبيق هذا على مثالنا السابق، نلاحظ في الشكل (2) إن الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى يكون عند النقطة (*f*)، ويكون الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الثانية عند النقطة (*c*)، وهما أقرب ما يمكن لنقطة الحل الرئيسية (*h*).

وبناء على ما سبق يمكن تحليل عملية تحرك نقطة الحل (حركة النقطة (*h*) إلى النقطتين (*f*) و (*c*))، بمعنى تحليل سبب انتقالها إلى هاتين النقطتين تحديداً (*c* ،*f*)، ومعرفة أي منها سيعطي قيم أفضل لدالة الهدف. إن هذا يتطلب تحليل العوامل أو العناصر المؤثرة في تحرك (انتقال) نقطة الحل الرئيسية (*h*) إلى احداثيات النقطتين (*c* ،*f*)، وهذه العوامل وهي :

- مقدار الكسر في المتغير المستخدم في عملية التفريع.
- ميل الخط المستقيم (القيد) الذي تتحرك عليه نقطة الحل الرئيسية باتجاه حلول المشاكل الفرعية.
- ميل دالة الهدف (معاملات المتغيرات في دالة الهدف).

ونظراً لأهمية هذه العوامل في الإجابة على التساؤلات المطروحة في مشكلة هذا البحث، سيتم هنا دراسة وتحليل كافة هذه العوامل كلاً على حدة وبشيء من التفصيل، ووضعها في إطار عام بهدف الوقوف على تأثير هذه العوامل مجتمعة على الحلول الناتجة عن عملية التفريع، ومن تم استخدام هذا في تحديد أي من المشكلتين الفرعيتين (الأوليتين في شجرة التفريعات) الواجب تفريعها، بمعنى تحديد المشكلة الفرعية المرشحة والتي تتضمن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وبالتالي معرفة المشكلة الفرعية الأخرى (غير المرشحة) التي لا تتضمن الحل الأمثل (*Int*)، ومن تم التوقف عن تفريعها لتوفير الوقت والجهد في الوصول للحل الأمثل.

1.6 مقدار الكسر بالمتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع

في طريقة (B&B) يتم التخلص من الكسور الموجودة في قيم الحل الأمثل للمشكلة، عن طريق إضافة قيد يحمل علامة (≤) مرة ويعني تقريب قيمة المتغير (العدد الكسري) للعدد الصحيح الأدنى، ومرة أخرى بإضافة قيد يحمل (≥) ويعني تقريب العدد الكسري للحد الأعلى، وعلى هذا الأساس يمكن تحديد قيمة الكسر في الحالتين، ففي الحالة الأولى (التقريب للحد الأدنى) يكون مقدار الكسر قيمة الكسر في حداته، وفي الحالة الثانية يمكن إضافة قيمة للكسر لتصبح قيمة المتغير عدد صحيح (إضافة

المتمم الحسابي للكسر لتصبح قيمة المتغير عدد صحيح). وعند تطبيق ما ذكر على النموذج الرياضي السابق والذي قيمة الحل للمتغير المستخدم في عملية التفريع (x_1) تساوي (4.29)، وعليه فإن مقدار الكسر في الحالة الأولى (المشكلة الفرعية الأولى) يساوي (0.29)، أي أنه سيتم حذف هذه القيمة من قيمة المتغير لتصبح قيمتة تساوي (4)، وفي الحالة الثانية يكون مقدار الكسر هو المتمم الحسابي لهذا العدد الكسري وهو (0.71)، لتصبح قيمة هذا المتغير في المشكلة الفرعية الثانية ($5 = 0.71 + 4.29$)، ويمكن توضيح تأثير كلا الحالتين كالتالي:

أولاً- في حالة حذف قيمة الكسر من المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الأولى):

إن عملية حذف قيمة الكسر من المتغير المستخدم كأساس لعملية التفريع تعني حدوث انخفاض في قيمة هذا المتغير بمقدار قيمة الكسر، وهذا طبعاً سيؤدي إلى حدوث تغير في قيمة المتغير الأخر، وهذا التغير يمكن أن يكون بالزيادة أو النقصان، وذلك بناءً على العلاقة بين هذه المتغيرات (علاقة طردية أو عكسية). ففي النموذج المذكور أعلاه، إن عملية حذف قيمة الكسر (0.29) لتصبح قيمة المتغير (4)، ولإن العلاقة بين هذه المتغيرات علاقة عكسية، التي تمثلها معادلة (قيد) الخط المستقيم ($3x_1+5.2\ x_2 \leq 24$) الذي تتحرك عليه نقطة حل المشكلة الفرعية الألى، فإن الانخفاض في قيمة المتغير (x_1) بمقدار (0.29) سيؤدى إلى انتقال نقطة الحل (h) التي إحداثياتها ($2.14\ ,\ 4.29$) إلى النقطة (f) كما في الشكل (2)، وستكون احداثيات هذه النقطة (f) بالنسبة للمتغير (x_1) تساوي قيمة العدد بعد استبعاد الكسر وهي (4)، أما قيمته بالنسبة للمتغير الثاني (x_2) فستزاد، ومقدار هذه الزيادة يعتمد على العلاقة بين هذه المتغيرات التي يعكسها ميل هذا الخط المستقيم ($3x_1 + 5.2x_2 \leq 24$) والذي سيتم توضحه الفقرة القادمة (2.5).

ثانياً- في حالة إضافة المتمم الحسابي لقيمة كسر المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الثانية):

إن عملية إضافة قيمة المتمم الحسابي للكسر لتصبح قيمتة مساوية للعدد الصحيح (الحد الأعلى للعدد الكسري)، سيؤدي إلى تغير في قيمة المتغير الأخر (بالزيادة أو بالانخفاض) بناءً على العلاقة بين هذه المتغيرات. في النموذج السابق تكون قيمة المتمم الحسابي (**0.71**)، وعند إضافة هذه القيمة للمتغير(**x_1**) تصبح قيمته (**5** = 0.71 + 4.29)، وهذا طبعاً سيؤدي إلى حدوث انخفاض في قيمة المتغير الأخر (العلاقة عكسية)، وكما في الشكل (2) فقد انتقلت نقطة الحل من النقطة (***h***) إلى النقطة (***c***) التي تكون احداثيها بالنسبة للمتغير (**x_1**) تساوي (5)، أما قيمة المتغير الثاني فقد انخفضت، ويتوقف مقدار هذا الانخفاض على العلاقة بين هذه المتغيرات، والذي يعكسه ميل المعادلة المتمثلة في الخط المستقيم الذي تتحرك عليه نقطة الحل للمشكلة الفرعية الثانية (**$4x_1 + 4.6x_2 \leq 27$**) وهذا سيتم توضحه في الفقرة التالية:

2.6 مقدار التغير بين المتغيرات (ميل الخط المستقيم الواقعة عليه نقطة الحل الفرعية):

كما سبق الذكر أن التغير في مقدار أحد المتغيرات سيؤدي إلى التغير في قيمة المتغير الأخرى، وهذا يعتمد على العلاقة بين هذه المتغيرات. ولمعرفة مقدار التغير في المتغير الثاني (x_2) إذا حدث تغير في قيمة المتغير الأول (x_1)، فإنه يجب تحليل المعادلة التي تحكم هذه العلاقة (ميل المعادلة)، فإذا كان قيمة الميل سالبة (الخط المستقيم سالب الميل)، فإن العلاقة بينهما علاقة عكسية، ويعني أن الزيادة في أحد المتغيرات ستؤدي إلى انخفاض المتغير الأخر، والعكس صحيح أيضاً، أما إذا كانت العلاقة طردية (موجبة الميل) فإن الزيادة في أحدهما تؤدي إلى زيادة الأخر. والسؤال الذي يطرح نفسه هو كم مقدار هذا التغير سواء كانت العلاقة عكسية أو طردية؟ والجدير بالذكر هنا هو أن مقدار هذا التغير يعتمد على مقدار هذا الميل، ويمكن توضيح ذلك عن طريق تحليل النموذج الرياضي السابق كالتالي:

أولاً- في حالة حذف قيمة الكسر من المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الأولى):

في حالة انخفاض قيمة المتغير (x_1) بمقدار قيمة الكسر (0.29) لتصبح قيمته ($x_1 = 4$) فإن نقطة الحل (h) سوف تتحرك إلى النقطة (f) وذلك بناءً على ميل الخط المستقيم الذي تقع عليه هذه النقطة والذي تمثله المعادلة:

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 24 \qquad (7)$$

ويمكن إيجاد ميل هذه المعادلة بمعلومية نقطتين واقعتين على هذا الخط، ويمكن إيجاد احداثيات النقطة الأولى بفرض (x_1) بصفر وإيجاد قيمة (x_2)، والنقطة بفرض (x_2) بصفر وإيجاد قيمة (x_1)، وبهذا تكون إحداثيات النقطة الأولى ($0\ ,\ 4.62$) وإحداثيات النقطة الثانية ($8\ ,\ 0$)، وعليه يكون ميل الخط المستقيم لهذه المعادلة كالتالي:

$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(4.62-0)}{(0-8)} = \frac{4.62}{-8} = \frac{0.58}{-1}$$

وهذا يعني أن النقص في المتغير (x_1) بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة المتغير (x_2) بمقدار (0.58) وبما أن (x_1) انخفضت بمقدار (0.29) فإن المتغير (x_2) سوف يزداد بمقدار:

$$-0.29 \times \frac{0.58}{-1} = 0.17$$

وبذلك تكون القيمة الجديدة للمتغير (x_2) تساوي القيمة السابقة (2.14) مضافة إليها مقدار الزيادة (0.17).

$$2.14 + 0.17 = 2.31$$

لهذا انتقلت إحداثيات نقطة الحل (h) التي احداثياتها (2.14 , 4.29) إلى نقطة الحل (f) والتي تمثل حلاً للمشكلة الفرعية الأولى والتي إحداثياتها (2.31 , 4).

ثانياً- في حالة إضافة المتمم الحسابي لقيمة كسر المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الثانية):

في هذه الحالة، يتم إضافة المتمم الحسابي (0.71) للمتغير(x_1) ليصبح يساوي (5) بدلاً من (4.29)، وبهذا تتحرك نقطة الحل (h) إلى نقطة الحل (c)، وهي نقطة الحل للمشكلة الفرعية الثانية، وهي واقعة على الخط المستقيم الذي تمثلة المعادلة:

$4x_1 + 4.6x_2 \leq 27$ (8)

وبنفس الطريقة السابقة يتم إيجاد ميل هذه المعادلة، وذلك بفرض (x_1) مرة بصفر ونوجد (x_2) وبالعكس في المرة الثانية، وبهذا تكون إحداثيات النقطة الأولى (5.87 , 0)، واحداثيات النقطة الثانية (0 , 6.75). وبهذا يكون ميل الخط المستقيم لهذه المعادلة كالتالي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(5.87 - 0)}{(0 - 6.75)} = \frac{5.87}{-6.75} = \frac{0.87}{-1}$$

وهذا يعني أن الزيادة في المتغير (x_1) بمقدار (0.71) فإن المتغير (x_2) سوف ينخفض بمقدار:

$$0.71 \times \frac{0.87}{-1} = -0.62$$

وبذلك تكون القيمة الجديدة للمتغير (x_2) تساوي:

$$2.14 - 0.62 = 1.52$$

لهذا انتقلت النقطة الحل (h) إلى نقطة الحل للمشكلة الفرعية الثانية (c) والتي إحداثياتها (1.52 , 5).

نلاحظ أنه في الحالة الأولى (المشكلة الفرعية الأولى) تم التخلص من كسر المتغير الأول (x_1) والذي قيمته (4.29)، وذلك بحذف مقدار الكسر (0.29) لتصبح قيمة المتغير تساوي (4)، وهذا أدى إلى تغير قيمة المتغير الثاني (x_2) ليزداد بمقدار (0.17) وتصبح قيمته (2.31)، وبهذا انتقلت نقطة حل المشكلة الرئيسية من النقطة (h) التي إحداثياتها (2.14 , 4.29) إلى نقطة حل المشكلة الفرعية الأولى (f) التي إحداثياتها (2.31 , 4).

في الحالة الثانية (المشكلة الفرعية الثانية) تم التخلص من الكسر في المتغير الأول (x_1) بإضافة المتمم الحسابي (0.71)، لتصبح قيمته (5)، وهذا أدى إلى حدوث انخفاض في قيمة المتغير (x_2) بمقدار (0.62) لتصبح قيمته (1.52)، وبهذا انتقلت نقطة حل المشكلة الرئيسية من النقطة (h) إلى نقطة حل المشكلة الفرعية الثانية (c) التي إحداثياتها (1.52 , 5).

إن ما ذكر أعلاه يوضح حلول المشاكل الفرعية المتولدة نتيجة التغير في المتغيرات القرارية عند تحويلها إلى قيم صحيحة (Int)، إلا أن التحليل السابق لا يوضح ما مدى الجدوى من هذه الحلول (قيمة دالة الهدف عند حلول المشاكل الفرعية)، ولكي نتمكن من تحديد أي من هذه الحلول هو الأفضل، وبالتالي معرفة أي من المشاكل الفرعية التي تمثل المشكلة المرشحة والتي يجب الاستمرار في عملية تفريعها، والأخرى التي يجب التوقف عن تفريعها، فإن الأمر يتطلب تحليل دالة الهدف وتأثير هذه التغيرات عليها، وهذا ما سيتم دراسته في الفقرة التالي:

3.6 قيم معاملات المتغيرات القرارية بدالة الهدف (ميل الخط المستقيم لدالة الهدف)

تمكنا عن طريق التحليل السابق من معرفة إحداثيات حلول المشاكل الفرعية الناتجة عن التغير في قيمة المتغير المستخدم في عملية التفريع، والسؤال الذي يطرح نفسه هو، هل يمكن معرفة ما مدى تأثير هذا التغير على قيمة دالة الهدف؟ ومن تم تقييم هذه الحلول لمعرفة أي منها هو الأفضل؟ ويمكن الإجابة على هذا السؤال بنعم، بعد تحليل التناسب في معاملات دالة الهدف، ويمكن توضيح ذلك كالتالي:

أولاً: في حالة حذف قيمة الكسر من المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الأولى):

في هذه الحالة يتم حذف الجزء الكسري من قيمة المتغير بإضافة قيد يحمل علامة (≤)، ففي النموذج الرياضي السابق مثلاً كانت قيمة المتغير الأول (x_1) تساوي (4.29) وتم تخفيضه بمقدار (0.29) لتصبح قيمته (4)، وهذا أدى إلى زيادة المتغير (x_2) بمقدار (0.17) ليصبح (2.31)، وبهذا يكون الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى هو (2.31 ، 4)، وبأخذ دالة الهدف في الاعتبار دالة الهدف وهي:

$Max\ (z) = 5x_1 + 6x_2$ (9)

إن مقدار الانخفاض في المتغير (x_1) يساوي (0.29) سيؤدي إلى انخفاض في دالة الهدف بمقدار يساوي مقدار الانخفاض (0.29) مضروبة في معامل المتغير في دالة الهدف وهو (5)، وعليه سيكون مقدار الانخفاض يساوي

$-0.29 \times 5 = -1.45$

ومقابل الانخفاض في المتغير(x_1) ستحدث زيادة في المتغير (x_2) بمقدار (0.17)، وهذا طبعاً سيؤدي إلى زيادة في دالة الهدف كما يلي:

$0.17 \times 6 = 1.02$

ونظراً لإن مقدار الانخفاض (-1.45) في دالة الهدف أكبر من مقدار الزيادة (1.02)، ستكون قيمة دالة الهدف للمشكلة الفرعية الأولى عند النقطة (f) أقل من سابقتها (h)، وبهذا تكون قيمة الحل عند للمشكلة الفرعية (f) تساوي:

$34.29 - 1.45 + 1.02 = 33.86$

ثانياً- في حالة إضافة المتم الحسابي لقيمة كسر المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع (المشكلة الفرعية الثانية):

في هذه الحالة تم إضافة المتمم الحسابي (0.71) لتصبح قيمة المتغير (x_1) تساوي (5)، وهذا أدى إلى انخفاض في المتغير (x_2) بمقدار (0.62) ليصبح (1.52)، وبهذا يكون الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى هو (1.52، 5)، وبأخذ دالة الهدف في الاعتبار وهي:

$$Max\ (z) = 5x_1 + 6x_2 \qquad (10)$$

فإن مقدار الزيادة في المتغير الأول (0.71) سيؤدي إلى الزيادة في دالة الهدف تساوي مقدار هذه الزيادة مضروبة في معامل المتغير في دالة الهدف (5) وتساوي:

$$0.71 \times 5 = 3.55$$

وفي المقابل فإن الزيادة في المتغير الأول (x_1) سيؤدي إلى انخفاض في المتغير (x_2) بمقدار (0.62)، وهذا طبعاً سيؤدي إلى انخفاض في دالة الهدف، وهذا الانخفاض يمكن حسابه كالتالي:

$$-0.62 \times 6 = -3.72$$

ونظراً لإن دالة الهدف زادت بمقدار (3.55)، ومن جهة أخرى انخفضت بمقدار (3.72-)، فإن قيمة دالة الهدف عند النقطة (c) تساوي:

$$34.29 + 3.55 - 3.72 = 34.12$$

يتبين هنا أن كلا الحلين (حل المشكلة الفرعية الأولى وحل المشكلة الفرعية الثانية) لم يكونا حلول (*Int*) بسبب قيم حل المتغير الثاني (x_2)، وفي كلا الحلين كانت قيم (x_1) قيم صحيحة (4) و (5)، وقيم (x_2) قيم غير صحيحة (*Non-int*)، كما تبين أن قيمة حل المشكلة الفرعية الثانية (34.12) أفضل من قمة حل المشكلة الفرعية الاولى (33.86)، وكلاهما أقل من الحل الأمثل (*Non-int*) للمشكلة الرئيسية وهو (34.29)، والجدير بالذكر هنا أنه يمكن الاستفادة من هذا التحليل في تحديد اتجاهات التفريع، وتحديد أي من المشاكل الفرعية يمكن أن تكون المشكلة المرشحة وتتضمن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وذلك كما سيتضح في الفقرات التالية.

7. الاستفادة من تحليل حركة نقطة الحل في تحديد المشكلة الفرعية المرشحة للتفريع:

في هذه الفقرة سيتم دراسة التحليل السابق للاستفادة منه في إمكانية تحديد المشكلة الفرعية المرشحة للتفريع، بمعنى تحديد المشكلة الفرعية المتوقع احتوائها للحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وبالتالي عدم الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية الأخرى، والتي لا جدوى من تفريعها لعدم إحتوائها على الحل الأمثل (*Int*)، وذلك لتقليل عدد فروع شجرة التفريعات، بهدف الوصول للحل الأمثل بأقل عدد ممكن العمليات الحسابية لتوفير الوقت والجهد في ذلك، ويمكن القيام بذلك كالتالي:

أولاً- إمكانية الحصول على حل (Int) بالمشكلة الفرعية عند تخفيض قيمة الكسر أو زيادة المتمم الحسابي مقابل الزيادة أو الانخفاض في المتغير الأخر بوحدة واحدة

هنا سيتم دراسة المشكلتين الفرعيتين، لمعرفة ما مدى إمكانية الحصول على حل (*Int*) في هذه المشاكل الفرعية، فقيم الحل للمتغير المستخدم في التفريع تكون (*Int*) في كلا المشكلتين الفرعيتين، وبالتالي عند زيادة قيمة المتمم الحسابي للمتغير الأخر ليصبح (Int) وتخفيض المتغير الأول وحدة واحدة، هل ستكون هذه النقطة من ضمن الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى؟ وفي المقابل (المشكلة الفرعية الثانية) هل حذف الكسر من المتغير الثاني وإضافة وحدة واحدة للمتغير الأول سيولد حلاً ممكناً؟ ولكي نتمكن من توضيح هذا، سنستخدم هنا المثال السابق في كلا المشكلتين الفرعيتين كالتالي:

1) في حالة إضافة المتم الحسابي للمتغير الثاني (x_2) في المشكلة الفرعية الأولى وتخفيض المتغير (x_1) وحدة واحدة:

في المثال السابق كان الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (2.14 , 4.29)، وتم تفريع المشكلة على أساس المتغير (x_1)، وتم تفريع المشكلة الفرعية الأولى بإضافة القيد الأول ($x_1 \leq 4$)، وبناءً على التحليلات السابقة سيكون الحل الأمثل لهذه المشكلة الفرعية كالتالي:

ستكون قيمة المتغير (x_1) عند الحل الأمثل للمشكلة الفرعية تساوي (4)، لإن حل هذه المشكلة سيكون على أحد النقاط الطرفية للمتباينة ($x_1 \leq 4$)، فهو أقرب ما يكون لنقطة الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية، وبناءَ على التحليلات السابقة يمكن إيجاد قيمة (x_2) وقيمة دالة الهدف لهذا الحل (z)

$$x_1 = 4 \ ، \quad x_2 = 2.31 \ ، \quad z = 33.86$$

وبهذا يكون الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى (2.31 ، 4) وتحقق دالة الهدف عنده (33.86). والجدير بالذكر أن قيمة المتغير (x_1) قيمة صحيحة (4) وقيمة (x_2) تساوي (2.31)، والسؤال الذي بصدد الإجابة عليه هنا الفقرة هو:

هل زيادة قيمة (x_2) بمقدار (0.69) لتصبح عدد صحيح ($x_2 = 3$)، وتخفيض قيمة (x_1) بمقدار وحدة واحدة لتصبح (3)، تحقق حل ممكن (Feasible) أم لا ؟

بمعنى هل نقطة الحل (3 , 3) ستكون داخل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى؟

إن الإجابة على هذا السؤال يمكن أن تساعدنا في معرفة آلية التفريع (المشكلة الفرعية المرشحة للحل والتي يجب الاستمرار في تفريعها والأخرى التي يجب التوقف عن تفريعها). إن

التحليلات السابقة (تحليل تحرك نقطة الحل في تحديد عملية التفريع) يمكن استخدامها والاستفادة في الوصول للإجابة على هذا السؤال، وذلك كالتالي:

$\because \Delta x_2 = 0.69$

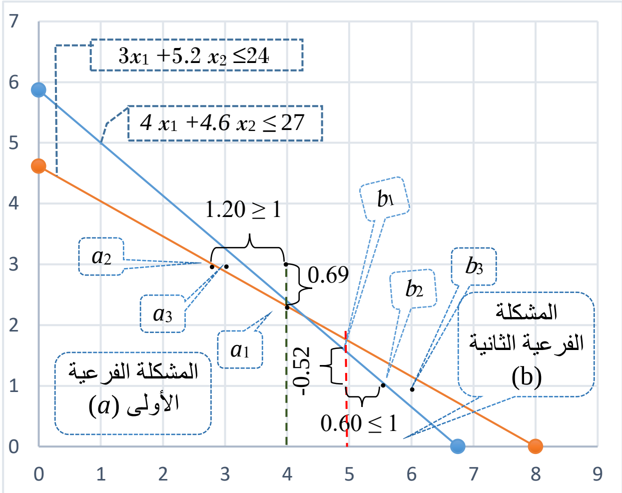
∵ ميل المعادلة (القيد) الذي يقع عليه حل المشكلة الفرعية الأولى $(3x_1 + 5.2x_2 \leq 24)$ يساوي 0.58 -

∴ الزيادة في x_2 بهذا المقدار (0.69) سيؤدي إلى انخفاض (Δx_1) في المتغير x_1 كما يلي:

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x_2}{slope} = \frac{0.69}{-0.58} = -1.20$$

وبما أن الانخفاض في (x_1) أكبر من الواحد فهذا يعني أن نقطة الحل (3 , 3) ستكون خارج منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى، كما هو مبين في الشكل (3).

ويمكن اثبات ذلك بالتعويض في معادلة المشكلة الفرعية الأولى $(3x_1 + 5.2x_2 \leq 24)$ عن النقطة (3 , 3)، وسيكون الناتج (24.6) اكبر من الطرف الأيمن للمعادلة (24) لهذا تكون النقطة (3 , 3) خارج منطقة الحلول الممكنة.



نقاط المشكلة الفرعية الأولى (a)			نقاط المشكلة الفرعية الثانية (b)		
النقطة	احداثياتها	Z	النقطة	الاحداثيات	Z
a_1	(4 , 2.31)	33.86	b_1	(5 , 1.52)	34.12
a_2	(2.81 , 3)	32.05	b_2	(5.60 , 1)	34
a_3	(3 , 3)	33	b_3	(1 , 6)	36

الشكل (3) عدم وجود حل (Int) مرشح في كلا المشكلتين الفرعيتين

2) في حالة تخفيض قيمة الكسر للمتغير الثاني (x_2) في المشكلة الفرعية الثانية وزيادة المتغير (x_1) وحدة واحدة:

بنفس المنطق السابق، فإن المشكلة الفرعية (الثانية) قد تكونت بإضافة قيد جديد (القيد الثاني) الذي تمثله المتباينة $(x_1 \geq 5)$، وعليه يمكن إيجاد الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الثانية كالتالي:

ستكون قيمة المتغير (x_1) عند الحل الأمثل للمشكلة الفرعية تساوي (5)، لإن حل هذه المشكلة سيكون على أحد النقاط الطرفية للمتباين $(x_1 \geq 5)$، لأنه الأقرب لنقطة الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية، وبناءً على التحليلات السابقة يمكن إيجاد قيمة (x_2) وقيمة دالة الهدف لهذا الحل (z) كما يلي:

$x_2 = 1.52$ ، $x_1 = 5$ ، $z = 34.12$

وبهذا يكون الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الثانية (5 ،1.52) وتحقق دالة الهدف عند هذا الحل (34.12)، وبما أن قيمة المتغير (x_1) قيمة صحيحة تساوي (5) وقيمة (x_2) تساوي (1.52)، السؤال الذي يجب الإجابة عليه هنا هو:

هل تخفيض قيمة الكسر للمتغير (x_2) وهو (0.52) لتصبح قيمته $(x_2 = 1)$، وزيادة قيمة (x_1) بمقدار وحدة واحدة لتصبح قيمته (6)، تحقق حل ممكن أم لا ؟ بمعنى هل نقطة (1 , 6) ستكون داخل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الثانية؟

ويمكن معرفة ذلك باستخدام ذات التحليل السابق (بالمشكلة الفرعية الأولى)، وذلك كما التالي:

$\because \Delta x_2 = - 0.52$

∵ ميل القيد (المعادلة) الذي تقع عليه حل المشكلة الفرعية الثانية $(4x_1 + 4.6x_2 \leq 27)$ يساوي 0.87

∴ الانخفاض في (x_2) بمقدار (0.52) سيؤدي إلى زيادة (x_1):

$$\therefore \Delta x_1 = \frac{\Delta x_2}{slope} = \frac{-0.52}{-0.87} = 0.60$$

وبما أن الزيادة في (x_1) اقل من الواحد فهذا يعني أن نقطة الحل (1 , 6) خارج منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الثانية، كما هو مبين في الشكل (3).

ويمكن اثبات ذلك بالتعويض عن النقطة (1 , 6) في معادلة المشكلة الفرعية الأولى $(4x_1 + 4.6x_2 \leq 27)$

وسيكون الناتج 29.2 وهو أكبر من 27 (الطرف الإيمن) لهذا فإن النقطة (1 , 6) ستكون خارج منطقة الحلول الممكنة.

إن الإجابة عن الأسئلة السابقة تؤدي إلى ظهور ثلاثة حالات يمكن الاستفادة منها في تحديد المشكلة الفرعية المرشحة لحل المشكلة الرئيسية، وبالتالي التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية الأخرى، ويمكن توضيح هذه الحالات كالتالي:

أ) عدم وجود حل (Int) في كلا المشكلتين الفرعيتين:

في هذه الحالة كلا الحلين اللذين تم الإشارة إليهما في الفقرة السابقة يكونا خارج منطقتي الحلول الممكنة للمشاكل الفرعية، والمثال السابق (النموذج الرياضي السابق) يجسد هذه الحالة. ويتضح ذلك من الشكل (3) الذي يجسد هذا النموذج بيانياً، حيث يتبين فيه أن الحلول المثلى (Int) المعنية، خارج منطقتي الحلول الممكنة للمشاكل الفرعية، فحل المشكلة الفرعية الأولى والذي تمثله النقطة (a_3) التي إحداثياتها (3 , 3) ، والناتج من إضافة (0.71) إلى المتغير (x_2) لتصبح قيمته (3)، وتخفيض وحدة واحدة من المتغير (x_1) لتصبح قيمته (3) هو حل خارج منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى، ويمكن أن اثبات ذلك

من خلال التعويض بالنقطة (3 , 3) في متباينة المشكلة الفرعية الأولى ($3x_1 + 5.2x_2 \leq 24$)، حيث يكون الناتج (24.6) وهو اكبر من الطرف الأيمن للمتباينة (24)، بمعنى أنه لا يحقق الشرط، لهذا تكون هذه النقطة خارج منطقة الحلول الممكنة.

وكذلك الأمـر بالنسـبة للمشكلة الفرعية الثانية، فيتبين من الشكل (3) أن الحل (*Int*) الذي تمثلة (b_3) وإحداثياته (1 , 6)، وهو ناتجه من تخفيض المتغير (x_2) بمقدار كسره (0.52) لتصبح قيمته (1)، وزيادة قيمة المتغير الأول (x_1) وحدة واحدة لتصبح قيمته (6)، هو أيضاً خارج منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الثانية، ويمكن أثبات ذلك بالتعويض عن لنقطة (1 , 6) في معادلة المشكلة الفرعية الثانية ($4x_1 + 4.6x_2 \leq 27$)، حيث يكون الناتج (29.2) وهو اكبر من الطرف الأيمن للمتباينة (27)، أي أنه لا يحقق هذا الشرط، لهذا يعتبر حل غير ممكن.

والجدير بالذكر هنا أن الحلول (*Int*) في كلا المشكلتين الفرعيتين خارج الحلول الممكنة، لا يمكننا الاستفادة من تحديد المشكلة الفرعية المرشحة للحل، وبالتالي في هذه الحالة يجب الاستمرار في تفريع كلا المشكلتين الفرعيتين.

ب) وجود حل (Int) في كلا المشكلتين الفرعيتين:

حتى نتمكن من توضيح هذه الحالة والتي هي على العكس تماماً من الحالة السابقة، أي أنه في هذه الحالة يكونا كلا الحلين المعنيان داخل منطقة الحلول الممكنة، ولتوضيح هذه الحالة نفرض المثال التالي، وهو نفس النموذج السابق للحالة السابقة، إلا أنه تم مضاعفة الطرف الأيمن للقيود وبذلك يكون النموذج كالتالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 \qquad (11)$$

$$ST:$$

$$4x_1 + 4.6x_2 \leq 54 \qquad (12)$$

$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 48 \qquad (13)$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

إن الحل الأمثل (*Non-int*) لهذا النموذج هو:

($x_1 = 8.57$ ، $x_2 = 4.29$ ، $z = 68.57$)

وبناءً على هذا الحل فإن عملية التفريع باستخدام المتغير (x_1) ستتم بإضافة القيدين التاليين:

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1 \geq 9$$

عند حل هذا النموذج مع القيدين الجديدين يتبين أن حلول المشاكل الفرعية هي كالتالي:

الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى:

($x_1 = 8$ ، $x_2 = 4.62$ ، $z = 67.69$)

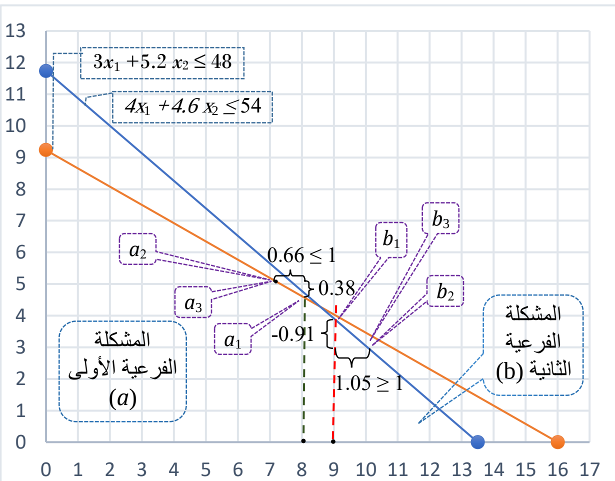
الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الثانية:

($x_1 = 9$ ، $x_2 = 3.91$ ، $z = 68.48$)

عند تمثيل هذا النموذج بيانياً كما في الشكل (4)، فإنه يتبين أن الحل المعني بالمشكلة الفرعية الأولى والذي تمثله النقطة (a_3) وحداثياته (5 , 7)، والناتج من إضافة (0.38) إلى المتغير (x_2) لتصبح قيمته (5)، وتخفيض وحدة واحدة من المتغير (x_1) لتصبح قيمته (7) داخل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى، ويمكن أثبات ذلك جبرياً، وذلك بالتعويض بالنقطة (5 , 7) في متباينة المشكلة الفرعية الأولى ($3x_1 + 5.2x_2 \leq 48$) حيث يكون الناتج (47) وهو اقل من (48)، أي أنه يرضي هذا القيد، لهذا فهو حل ممكن. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الزيادة في (x_2) بمقدار (0.38) أدى إلى انخفاض (x_1) بمقدار (0.66) لتصبح قيمة (x_1) تساوي (7.34).

وكذلك الأمر في المشكلة الفرعية الثانية، فالحل (b_3) الذي إحداثياته (3 , 10) وهو ناتج من تخفيض المتغير (x_2) بمقدار كسره (0.91) لتصبح قيمته (3)، وزيادة قيمة المتغير الأول (x_1) وحدة واحدة لتصبح قيمته (10) هو من ضمن الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الثانية، ويمكن تبيان ذلك رياضياً من خلال التعويض بالنقطة (3 , 10) في قيد المشكلة الفرعية الثانية ($4x_1 + 4.6x_2 \leq 54$) حيث يكون الناتج (53.8) وهو اقل من الطرف الأيمن للقيد (54)، أي أنه يرضي هذا القيد، وبالتالي يعتبر حل ممكن أيضاً. ويمكن الإشارة أيضاً إلى أن الانخفاض في (x_2) بمقدار (0.91) أدى إلى زيادة (x_1) بمقدار (1.05) لتصبح قيمة (x_1) تساوي (10.05).

وبذلك يكونا هذان الحلين حلول ممكنة (كلاً منها داخل منطقة الحلول الممكنة لمشكلة الفرعية). وهذه الحالة أيضاً لا يمكننا الاستفادة منها في تحديد المشكلة الفرعية (المرشحة)، وبالتالي يجب الاستمرار في تفريع كلا المشكلتين الفرعيتين.



نقاط المشكلة الفرعية الثانية (b)			نقاط المشكلة الفرعية الأولى (*a*)		
Z	احداثياتها	النقطة	Z	احداثياتها	النقطة
68.48	(9 , 3.91)	b_1	67.69	(8 , 4.62)	a_1
68.25	(10.05 , 3)	b_2	66.65	(7.34 , 5)	a_2
68	(10 , 3)	b_3	65	(7 , 5)	a_3

الشكل (4) وجود حل (*Int*) مرشح في كلا المشكلتين الفرعيتين

ج) وجود حل (Int) بمشكلة فرعية وعدم وجوده في الأخرى

ولتوضيح هذه الحالة نفرض النموذج الرياضي التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (14)$$
$$ST:$$
$$4.2x_1 + 4.6x_2 \leq 54 \qquad (15)$$
$$3x_1 + 5.2x_2 \leq 45 \qquad (16)$$

مع العلم بأن الحل الأمثل ($Non\text{-}int$) لهذا النموذج هو:

($x_1 = 9.18$ ، $x_2 = 3.36$ ، $z = 72.78$)

وبناءً على هذا الحل فإن عملية التفريع باستخدام المتغير (x_1) ستتم بإضافة القيدين التاليين:

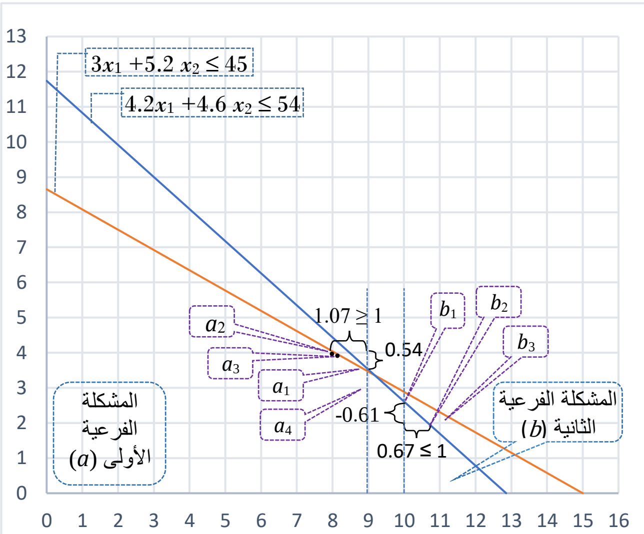
$x_1 \leq 9$ ، $x_1 \geq 10$

عند حل هذا النموذج يتبين أن حلول المشاكل الفرعية كالتالي:

المشكلة الفرعية الأولى: ($x_1 = 9$ ، $x_2 = 3.46$ ، $z = 72.68$)

المشكلة الفرعية الثانية: ($x_1 = 10$ ، $x_2 = 2.61$ ، $z = 70.88$)

عند تمثيل هذا النموذج بيانياً يظهر كما في الشكل (5)، يتبين أن الحل (Int) المعني في المشكلة الفرعية الأولى والذي تمثله النقطة (a_3) واحداثياتها (8 , 4) ، وهو ناتج من إضافة (0.54) إلى المتغير (x_2) لتصبح قيمته (4)، وتخفيض وحدة واحدة من المتغير (x_1) لتصبح قيمته (8) هو داخل منطقة الحلول الممكنة للمشكلة الفرعية الأولى، ويمكن اثبات ذلك عن طريق التعويض بالنقطة (8 , 4) في المتباينة المحددة للمشكلة الفرعية الأولى ($3x_1 + 5.2x_2 \leq 45$) حيث يكون الناتج (44.8) وهو اقل من الطرف الأيمن (45)، أي أنه يرضي الشرط (حل ممكن).



النقطة	احداثياتها	Z	النقطة	احداثياتها	Z
	نقاط المشكلة الفرعية الأولى (a)			*نقاط المشكلة الفرعية الثانية* (b)	
a_1	(9 , 3.46)	72.68	b_1	(10 , 2.61)	70.88
a_2	(7.93 , 4)	71.65	b_2	(10.67 , 2)	69.35
a_3	(8 , 4)	72	b_3	(11 , 2)	71(غير ممكنة)
a_4	(9 , 3)	69			

الشكل (5) وجود حل (Int) بمشكلة فرعية وعدم وجوده في الأخرى

أما الحل المعني في المشكلة الفرعية الثانية (b_3) وإحداثياته (2 , 11) وهو ناتج من تخفيض المتغير (x_2) بمقدار (0.61) ليصبح (2)، وزيادة قيمة المتغير (x_1) وحدة واحدة لتصبح (11) هو حل خارج منطقة الحلول لهذه المشكلة، ويمكن اثبات ذلك بالتعويض عن هذه النقطة في المتباينة المحددة للمشكلة الفرعية الثانية ($4.2x_1 + 4.6x_2 \leq 54$)، حيث يكون الناتج (55.4) وهو أكبر من الطرف الأيمن للمتباينة (54)، وهذا يعني أنه لا يرضي القيد (حل غير ممكن).

الجدير بالذكر هنا هو أنه يمكن الاستفادة من هذه الحالة (وجود حل (Int) في مشكلة فرعية وعدم وجودة في الأخرى) في تحديد المشكلة الفرعية المرشحة للحل (التي يجب تفريعها وبالتالي التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية الأخر)، إلا أنه ليس دائماً يمكن الاستفادة من هذه الحالة، ويمكن تحديد الحالات التي يمكن الاستفادة منها هنا وذلك بتتبع الخطوات التالية:

أولاً- إيجاد أفضل حل (Int) متاح (a^*) بالمشكلة الفرعية المرشحة لإحتواء الحل الأمثل

في هذه الخطوة يتم تحديد أفضل حل (Int) متاح (a^*)، عن طريق إجراء مقارنة بين الحل المرشح لأن يكون الحل الأمثل (Int) للمشكلة والذي تم تحديده في الخطوة السابقة (الذي تمثله النقطة (a_3) في الشكل (5)) مع الحل الأمثل لذات المشكلة الفرعية بعد استبعاد الكسور منه، وحتى نستطيع توضيح هذا، نطبق ما ذكر على النموذج السابق، حيث كان الحل الأمثل للمشكلة الفرعية الأولى هو (9 ، 3.46)، وبعد استبعاد الكسور منه اصبح يساوي (9 ، 3)، والذي تمثله النقطة (a_4) في الشكل (5)، وبذلك تكون عملية المقارنة كالتالي:

إذا كانت دالة الهدف للنقطة (a_3) أفضل من قيمتها عند النقطة (a_4)، نجعل ($a^* = a_3$)، غير ذلك نجعل ($a^* = a_4$).

وفي هــذا المثـال نلاحـظ أن (a_3) أفضـل من (a_4)، حيث كانت دالة الهدف عند النقطة (a_3) تســاوي (72) ، بينما قيمة دالة الهـدف عنـد النقـطة (a_4) تسـاوي (69)، وبذلك نجعـل ($a^* = a_3$).

ثانياً- مقارنة أفضل حل (Int) متاح (za^*) بدالة الهدف للحل الأمثل للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

إن إجراء عملية المقارنة هذه سينتج عنها أحد الحالتين التاليتين:

أ) عندما تكون دالة الهدف لـ (a^*) أفضل من دالة الهدف للحل الأمثل للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

عندما تكون دالة الهدف لـ (a^*) أفضل من الحل الأمثل للمشكلة الفرعية غير المرشحة، فهذا يعني أن الحل (*Int*) بالمشكلة الفرعية المرشحة أفضل من الحل الأمثل (*Non-int*) للمشكلة الفرعية الأخرى، وبالتالي لا يمكننا الحصول على حل (*Int*) من هذا الحل (*Non-int*) يكون أفضل من الحل (a^*)، لإنه من أجل الحصول على حل (*Int*) يجب الاستمرار في تفريع هذه المشكلة، والاستمرار في عملية التفريع يعني حدوث انخفاض في دالة الهدف، بمعنى إن أي حل نحصل عليه من عملية التفريع سيكون أسوء من الحل (a^*) الذي تم الحصول عليه في المشكلة الفرعية المرشحة، وبالتالي من غير المجدي الاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية الأخرى (غير المرشحة) لإنه لن يظهر فيها حل (*Int*) أفضل من (a^*).

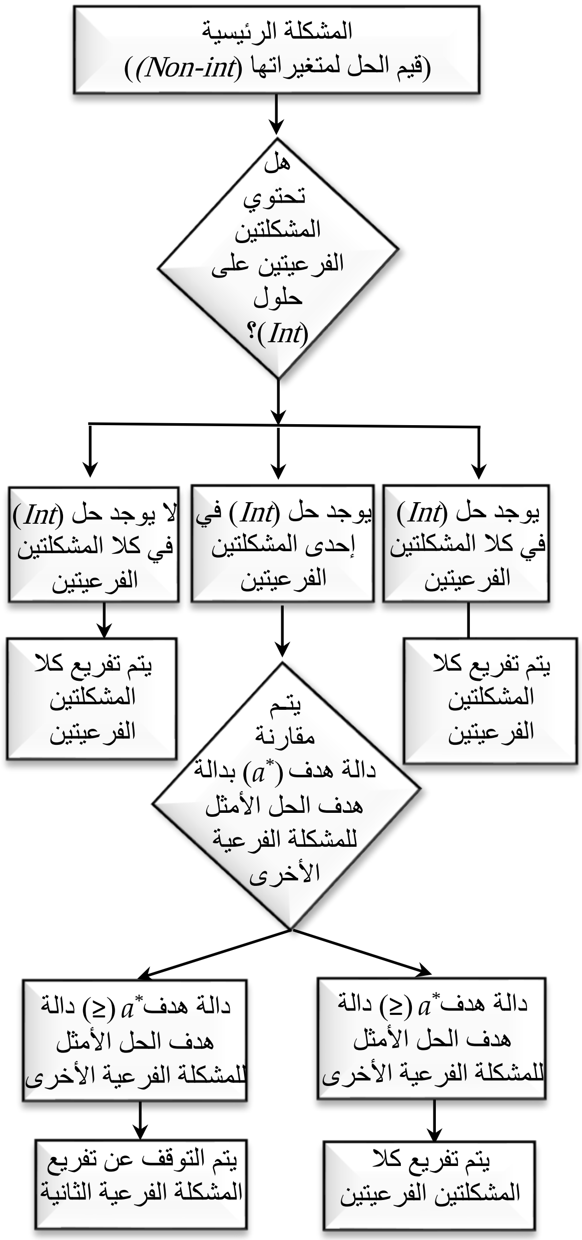
ويتضح هذا في مثالنا هذا، حيث كانت قيمة دالة الهدف لـ (a^*) هو (72)، في حين أن حل المشكلة الفرعية غير المرشحة يساوي (70.88)، وهو (*Non-int*) وهو أفضل حل لهذه المشكلة الفرعية، ولا يمكن بأي حال من الأحوال الحصول على حل (*Int*) يكون أفضل من (a^*)، وبالتالي لا يوجد مبرر للاستمرار في تفريع المشكلة الفرعية غير المرشحة.

ب) عندما تكون دالة الهدف لـ (a^*) أسوأ من دالة الهدف للحل الأمثل للمشكلة الفرعية غير المرشحة للحل

عندما يكون الحل الــ (*Int*) في المشكلة الفرعية المرشحة للحل (a^*) أســوأ من الحــل الأمثل (*Non-int*) للمشكلة الفرعية الأخرى، هذا يعني أن المشكلة الفرعية غير المرشحة للحل من الممكن أن تحتوي على الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، لأنه بالرغم من الانخفاض الذي يمكن أن يحدث عند القيام بعملية التفريع للمشكلة الفرعية غير المرشحة، فإنه من الممكن الحصول على حل (*Int*) يكون أفضل من (a^*)، وبالتالي من الضروري الاستمرار في تفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين، لإنه لا نعلم بالضبط في أي المشكلتين الفرعيتين يكمن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية. وعلى سبيل المثال في حالة تغير معامل (x_2) في دالة الهدف في النموذج السابق لتكون (6) بدلاً من (8) ستكون دالة الهدف ($a^*=64$)، في حين أن دالة الهدف للمشكلة الفرعية غير المرشحة (65.66)، وهذا يعني ضرورة تفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين.

8- ملخص كيفية الاستفادة من تحليل حركة نقطة الحل في آلية التفريع في طريقة (B&B):

يمكن تلخيص ماذكر أعلاه (تحليل حركة نقطة الحل لتحديد آلية التفريع) في الشكل المخطط (6)، الذي يوضح الخطوات التي يجب القيام بها لمعرفة إمكانية تفريع المشكلة المرشحة للحل لإحتوائها الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية.
بمعنى أخر أن هذا المخطط يوضح الحالة التي نتوقف فيها عن تفريع إحدى المشاكل الفرعية (المشكلة غير المرشحة للحل)، وذلك لتقليل عدد المشاكل الفرعية بهدف تخفيض العمليات الحسابية (الجهد والوقت) اللازمة للوصول ألى الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الأساسية.



الشكل (6) الخطوات التي يجب القيام بها لمعرفة ما مدى إمكانية التوقف عن تفريع المشكلة غير المرشحة

9-استنتاجات الدراسة:

إن طريقة (B&B) من أهم الطرق المستخدمة في إيجاد الحل الأمثل (*Int*) التي تبدأ خطوات حلها من الحل الأمثل (*Non-Int*) للمشكلة الرئيسية، وذلك بتفريع المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين، وإن الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة (الرئيسية) في إحدى هاتين المشكلتين الفرعيتين، إلا أن هذه الطريقة تتطلب القيام بتفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين، ومن التحليلات السابقة لهذه الورقة يمكن استنتاج التالية:

1) يرى بعض المؤلفين أن الحل الأمثل (Int) للمشكلة الرئيسية يكون في المشكلة الفرعية التي تحقق دالة هدف أفضل، وبالتالي لا يوجد ضرورة لتفريع المشكلة الفرعية الأخرى (ذات دالة الهدف الأسواء)، إلا أنه من التحليلات السابقة تبين أن هذا غير صحيح، ففي المثال الافتراضي الأول كانت قيمة دالة الهدف للمشكلة الفرعية الثانية (b) تساوي (34.13)، وهي أكبر من قيمة دالة الهدف للمشكلة الفرعية الأولى (*a*) والتي تساوي (33.85)، وإن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (*Int*) كان من ضمن حلول المشكلة الفرعية الأولى، وتحديداً عند النقطة (2 , 4) التي قيمة دالة هدفها (32). وبالتالي يمكننا الجزم بأن هذا الرأي غير صحيح، وأنه ليس بالضرورة أن يكون الحل الأمثل للمشكلة الرئيسية (Int) من ضمن حلول المشكلة الفرعية ذات دالة الهدف الأفضل، وبالتالي لا يمكن استخدام هذا المعيار في تقليص عدد المشاكل الفرعية.
2) من تحليل حركة نقطة الحل للمشكلة الرئيسية، يمكن التأكيد على أن حركة نقطة الحل في الاتجاهين (اتجاة المشكلة الفرعية الأولى واتجاة المشكلة الفرعية الثانية) له تأثير مختلف على نواتج حلول المشاكل الفرعية، وإنه هناك عدة عوامل تؤثر في هذه الحركة، وهذه العوامل هي:
   - مقدار كسر المتغير المستخدم كأساس في عملية التفريع
   - مقدار التغير بين المتغيرين (ميل الخط المستقيم الواقعة عليه نقطة الحل للمشكلة الفرعية)
   - قيم معاملات دالة الهدف للمتغيرات القرارية (ميل الخط المستقيم لدالة الهدف)

   وبالتالي الاختلاف في هذه العوامل سيكون لها تأثيرات مختلف على حركة نقطة الحل في كلا من الأتجاهين (الابتعاد عن نقطة الحل للمشكلة الرئيسية (*Non-int*)، وهذا طبعاً سيكون له تأثير مباشر ومختلف على هذه الحلول الفرعية (يؤدي إلى تدهورها بنسب مختلفة)، وعليه في بعض الحالات يمكن الاستفادة من هذه التأثيرات (المختلفة) في تحديد المشكلة الفرعية المرشحة (المتضمنة) للحل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وبالتالي عدم وجود حاجة لتفريع المشكلة الفرعية الأخرى (غير المرشحة للحل).

بمعنى أنه قبل المباشرة في تفريع كلتا المشكلتين الفرعيتين في طريقة (B&B)، يمكننا إجراء بعض الاختبارات لتحديد المشكلة الفرعية المرشحة للحل الأمثل (*Int*)، وبالتالي التوقف عن تفريع المشكلة الفرعية الأخرى (غير المرشحة)، وذلك بهدف تقليص شجرة التفريعات، والذي سيؤدي طبعاً إلى تقليص العمليات الحسابية اللازمة لذلك وبالتالي توفير الوقت والجهد للوصول إلى الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية.

10-الخلاصة Conclusion

في هذه الورقة تم دراسة طريقة التفريع والتحديد التي تعتبر من أهم الطرق المستخدمة في إيجاد الحل الأمثل (*Int*)، وهي تبدأ في الحل إنطلاقاً من الحل الأمثل (*Non-Int*)، وذلك عن طريق تفريع المشكلة الرئيسية إلى مشكلتين فرعيتين بناءً على أحد المتغيرات القرارية للمشكلة، ومن تم تفريع هذه المشاكل الفرعية إلى عدة مشاكل فرعية أخرى، وتستمر عملية التفريع هذه إلى حين عدم إمكانية القيام بها (ظهور حل (*Int*) بالمشكلة الفرعية أو عدم وجود لها حل اصلاً)، ويتم تحديد الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية عن طريق المفاضلة بين الحلول (*Int*) لهذه المشاكل الفرعية المتولدة أساساً من عملية التفريع.

إن الفكرة الرئيسية الكامنة وراء انطلاق هذا البحث هو معرفة ما مدى إمكانية تقليص عدد المشاكل الفرعية التي يجب القيام بها بهدف الوصول إلى الحل الأمثل (*Int*) للمشكلة الرئيسية، وذلك عن طريق تحديد المشكلة الفرعية (المرشحة) التي تتضمن الحل الأمثل للمشكلة الرئيسة، وذلك بإجراء بعض الاختبارات على المشكلتين الفرعيتين الاساسيتين (المشكلتين الفرعيتين المتفرعتين من المشكلة الرئيسية)، حيث يمكن عن طريق هذه الاختبارات تحديد المشكلة الفرعية (المرشحة) المتضمنة للحل الأمثل للمشكلة الرئيسية. ونؤكد هنا بأن هذه المساهمة العلمية تم التوصل إليها عن طريق هذه الدراسة ولم يتم التطرق لها عند مراجعة الدراسات السابقة للموضوع.

المراجع

1- Dinakar Gade, Simge K¨u¸c¨ukyavuz, Dinakar Gade, Simge K¨u¸c¨ukyavuz, Suvrajeet Sen Integrated Systems Engineering 210 Baker Systems, 1971 Neil Avenue The Ohio State University, Columbus.OH.43210 {gade.6,kucukyavuz.2,sen.22}@osu.edu August 15, 2012.

2- A. H. Land and A. G. Doig.1960. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. Econometrica, Vol. 28, No3.

3- T. Achterberg, T. Koch, A. Martin. 2005. Branching rules revisited. Oper. Res. Lett. 33, 42-54.

4- F. Ortega, L.A. Wolsey. 2003. A branch-and-cut algorithm for the single-commodity, uncapacitated, fixed-charge network flow Problem. Networks, 143–158.

5- J.T. Linderoth, M.W.P. Savelsbergh .1999. A computational study of search strategies for mixed integer programming. INFORMS J. Comput11, 173.

6- M. Fischetti, M. Monaci, Backdoor branching, in: O. G¨unl¨uk, G.J. Woeginger (Eds.). 2011. Integer Programming and Combinatoral Optimization, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 6655, Springer, Berlin, Heidelberg, 183-191.

7- Elias Munapo. 2020.Improvement of the Branch and Bound Algorithm for Solving the Knapsack Linear Integer Problem. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies2(4 (104)), 59-69.

8- Lingying Huang, Xiaomeng Chen, Wei Huo, Jiazheng, Wang Fan Zhang, Bo Bai, Ling Shi.2021. Branch and Bound in Mixed Integer Linear Programming Problems: A Survey of Techniques and Trends. Preprint submitted to Discrete Optimization, https://arxiv.org/abs/2111.06257.

9- الشـيخ, عبـد الله وآحـرون. (2022)."| اختـيار المتغيـر ذو الكسر الأكبر أو الأصغر كأساس للتفريع في طريقة التفريع والتحديد"، The International Journal of Engineering and Information Technologe.(9) Vol (2022) June .

10- Carter, Michael W, Price, Camille C, Rabad, Ghaith (2019). Operations Research A Practical Introduction, CRC Press.

11- David R. Morrison, Sheldon H. Jacobson, Jason J. Sauppe, Edward C. Sewell. 2016. Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning. Discrete Optimization, 79-102.

12- D. Applegate, R.E. Bixby, V. Chv´atal, W. Cook.1995. Finding cuts in the TSP. Technical Report 95-05, DIMACS.

13- Lingying Huang, Xiaomeng Chen, Wei Huo, Jiazheng, Wang Fan Zhang, Bo Bai, Ling Shi.2021. Branch and Bound in Mixed Integer Linear Programming Problems: A Survey of Techniques and Trends. Preprint submitted to Discrete

Optimization,
https://arxiv.org/abs/2111.06257.

14- Takuya Akiba and Yoichi Iwata. 2016. Branch-and-reduce exponential/FPT algorithms in practice: A case study of vertex cover. Theoretical Computer Science,609, 211-225.

15- الجنابي ,حسين محمود. (2010).الاحدث في بحوث العمليات.دار الحامد للنشر والتوزيع.

16- , فتحي رزق. (2004).مدخل معاصر في بحوث العمليات تطبيقات بإستخدام الحاسب.الدار الجامعية.

17- العبيدي, محمود, ومؤيد الفضل. (2004). بحوث العمليات وتطبيقاتها في لإدارة الأعمال. الدراق للنشر والتوزيع.

18- حمدان ,فتحي خليل (2010). بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب. جامعة البترا. دار وائل للنشر.

19- دريباتي, محمد مزيد. (2014). خوارزمية القطع والتفريغ الجديدة لحل مسائل الخطية الصحيحة. مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية.مجلد 36 العدد(3).

20- رابح, بوعراب .(2016) تطبيقات في مقياس البرمجة المعمقة.كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير.

21- طه ،حمدي. (1996). مقدمة في بحوث العمليات. دار المريخ للنشر.

22- كعبور,محمد محمد. (2005) . أساسيات بحوث العمليات.منشورات الاكاديمية الدراسات العليا .

23- مرجان ,سليمان محمد. (2002). بحوث العمليات .دار الكتب الوطنية بنغازي , ليبيا.